Función signo

Sea la función $sign: \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ definida así:

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Una aproximación mediante una función continuamente diferenciable es:

$$sign(x) = \lim_{n\to\infty} \tanh(nx)$$

Obviamente la convergencia aquí no es uniforme, sólo puntual.

Función delta

Sea la función $\delta: \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta(x) = 1 - sign^2(x)$$

Ejemplo

Sea la función $sign_\infty: \mathbb{R} \to \{-\infty, 0, +\infty\}$ definida así:

$$sign_\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases}$$

$$sign_\infty(x) = \frac{x}{\delta(x)}$$

Función valor absoluto

Sea la función $|\quad|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida así:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x| = xsign(x)$$

Funciones mínimo y máximo

Sea la función $min: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida así:

$$min(x,y) = \begin{cases} x, & x < y \\ y, & x \geq y \end{cases}$$

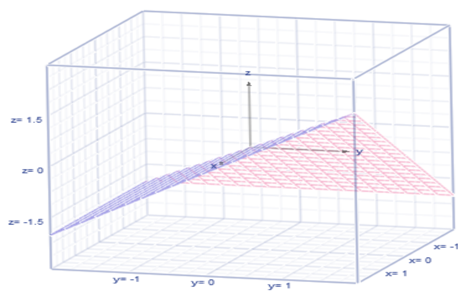
En la expresión $\frac{1-sign(x-y)}{2}x + \frac{1+sign(x-y)}{2}y$, la discontinuidad en $x = y$ es removible. Así se obtiene:

$$min(x,y) = \frac{(x+y) - |x-y|}{2}$$

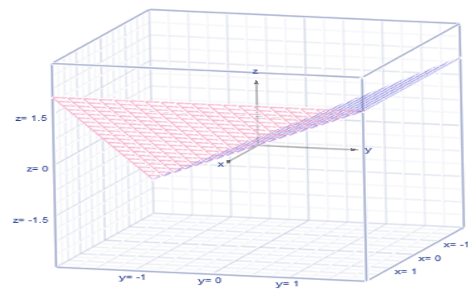
Luego, la función $max: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define así:

$$max(x,y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$$

$$max(x,y) = (x+y) - min(x,y) = \frac{(x+y)+|x-y|}{2}$$



$z = min(x,y)$



$z = max(x,y)$

Relación de pertenencia con respecto a un intervalo cerrado

Sea la función $f: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \\ 1, & x \in [a,b] \end{cases}$$

$$f_{[a,b]}(x) = sign\big(sign(x-a) - sign(x-b)\big)$$

Operaciones sobre intervalos cerrados

Intersección

Sea la función $f: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{[a,b]\cap[c,d]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \cap [c,d] \\ 1, & x \in [a,b] \cap [c,d] \end{cases}$$

$$f_{[a,b]\cap[c,d]}(x) = f_{[a,b]}(x) f_{[c,d]}(x)$$

Diferencia

Sea la función $f: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{[a,b]-[c,d]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] - [c,d] \\ 1, & x \in [a,b] - [c,d] \end{cases}$$

$$f_{[a,b]-[c,d]}(x) = f_{[a,b]}(x)\left(1 - f_{[c,d]}(x)\right)$$

Diferencia simétrica

Sea la función $f\colon \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{[a,b]\Delta[c,d]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b]\Delta[c,d] \\ 1, & x \in [a,b]\Delta[c,d] \end{cases}$$

$$f_{[a,b]\Delta[c,d]}(x) = \left|f_{[a,b]}(x) - f_{[c,d]}(x)\right|$$

Unión

Sea la función $f\colon \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{[a,b]\cup[c,d]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \cup [c,d] \\ 1, & x \in [a,b] \cup [c,d] \end{cases}$$

$$f_{[a,b]\cup[c,d]}(x) = f_{[a,b]\Delta[c,d]}(x) + f_{[a,b]\cap[c,d]}(x)$$

Si $[a,b] \cap [c,d] = \emptyset$, entonces:

$$f_{[a,b]\cup[c,d]}(x) = f_{[a,b]}(x) + f_{[c,d]}(x)$$

Identidades de De Morgan

- $1 - f_{[a,b]\cap[c,d]} = 1 - f_{[a,b]\cap[c,d]}$
- $1 - f_{[a,b]\cup[c,d]} = \left(1 - f_{[a,b]}\right)\left(1 - f_{[c,d]}\right)$

Producto cartesiano

Sea la función $f\colon \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{[a,b]\times[c,d]}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin [a,b] \times [c,d] \\ 1, & (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \end{cases}$$

$$f_{[a,b]\times[c,d]}(x,y) = f_{[a,b]}(x) f_{[c,d]}(y)$$

Relación de pertenencia con respecto a intervalos abiertos y semiabiertos

1) Sea la función $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{]-\infty,b]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \,]-\infty,b] \\ 1, & x \in \,]-\infty,b] \end{cases}$$

$$f_{]-\infty,b]}(x) = \lim_{a \to -\infty} f_{[a,b]}(x) = sign\left(1 - sign(x-b)\right)$$

2) Sea la función $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{]a,+\infty[}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \,]a,+\infty[\\ 1, & x \in \,]a,+\infty[\end{cases}$$

$$f_{]a,+\infty[}(x) = 1 - f_{]-\infty,a]}(x)$$

3) Sea la función $f: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{]a,b]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin]a,b] \\ 1, & x \in]a,b] \end{cases}$$

$$f_{]a,b]}(x) = \left(1 - f_{]-\infty,a]}(x)\right) f_{]-\infty,b]}(x)$$

4) Sea la función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{[a,+\infty[}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,+\infty[\\ 1, & x \in [a,+\infty[\end{cases}$$

$$f_{[a,+\infty[}(x) = \lim_{b \to +\infty} f_{[a,b]}(x) = sign\big(1 + sign(x-a)\big)$$

5) Sea la función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{]-\infty,b[}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin]-\infty,b[\\ 1, & x \in]-\infty,b[\end{cases}$$

$$f_{]-\infty,b[}(x) = 1 - f_{[b,+\infty[}(x)$$

6) Sea la función $f: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{[a,b[}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b[\\ 1, & x \in [a,b[\end{cases}$$

$$f_{[a,b[}(x) = f_{[a,+\infty[}(x)\left(1 - f_{[b,+\infty[}(x)\right)$$

7) Sea la función $f: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\} \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$f_{]a,b[}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin]a,b[\\ 1, & x \in]a,b[\end{cases}$$

$$f_{]a,b[}(x) = \left(1 - f_{]-\infty,a]}(x)\right)\left(1 - f_{[b,+\infty[}(x)\right)$$

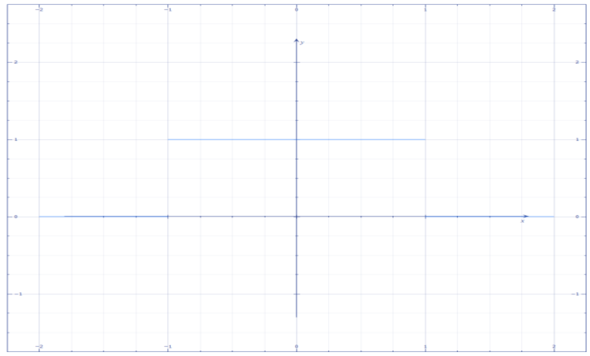
Ejemplo

$$\delta(x) = f_{]-\infty,0]}(x) f_{[0,+\infty[}(x)$$

Ejemplo

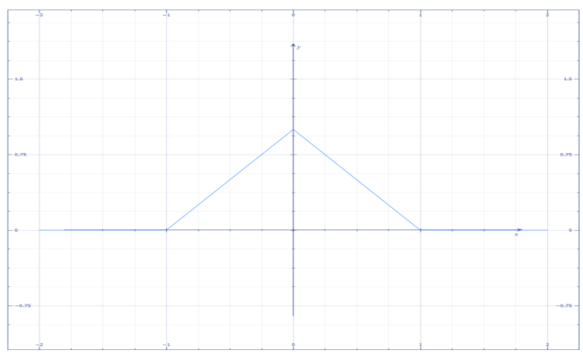
Sea $a \in \mathbb{R}^+$, luego:

$$f_{]-a,a[}(x) = 1 - sign\big(1 - sign(a - |x|)\big)$$



Sean $b \in \mathbb{R}^+$ y los vértices del triángulo isósceles (de intersección con el eje y: $(0, b)$, y de intersecciones con el eje x: $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Es decir, los vértices están dados por los puntos:$(0, b)$ y $(sign(x)a, 0)$. Se define la función $f: \mathbb{R} \to [0, b]$así:

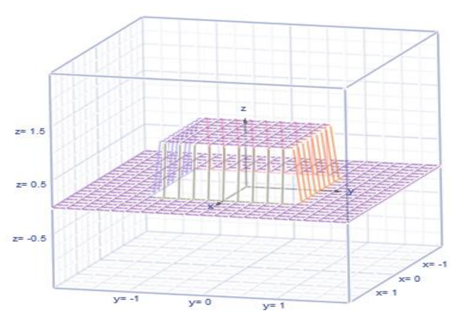
$$f(x) = b\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) f_{]-a,a[}(x)$$



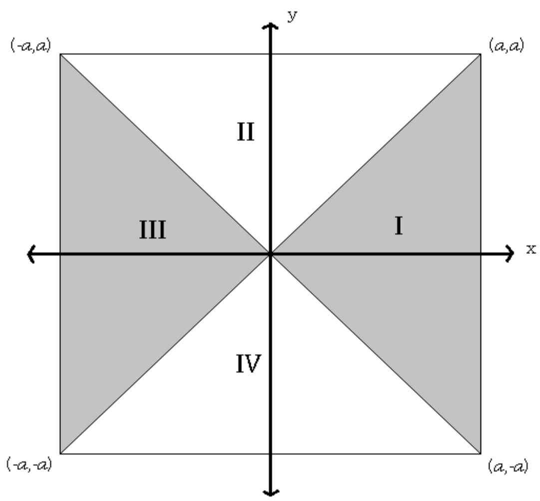
Ejemplo

Sea $a \in \mathbb{R}^+$, luego:

$$f_{]-a,a[^2}(x, y) = 1 - sign\left(2 - \left(sign(a - |x|) + sign(a - |y|)\right)\right)$$



Sean $b \in \mathbb{R}^+$ y los vértices de la pirámide recta de base cuadrada (de intersección con el eje z: $(0,0, b)$ y de intersecciones con el plano xy: $(a, a), (-a, a), (-a, a)$ y $(a, -a)$).



I: $|y| < x < a$

II: $|x| < y < a$

III: $|y| < -x < a$

IV: $|x| < -y < a$

Es decir, los vértices de cada cara triangular están dados por:

$$\boldsymbol{A} = (0,0,b), \boldsymbol{B} = (sign(x)a, sign(y)a, 0), \boldsymbol{C} = (-sign(x)sign(|y| - |x|)a, sign(y)sign(|y| - |x|)a, -b)$$

Sea $\boldsymbol{H} = (x, y, z)$ un punto cualquiera sobre estas caras, entonces la ecuación del plano de cada una de ellas es dada por:

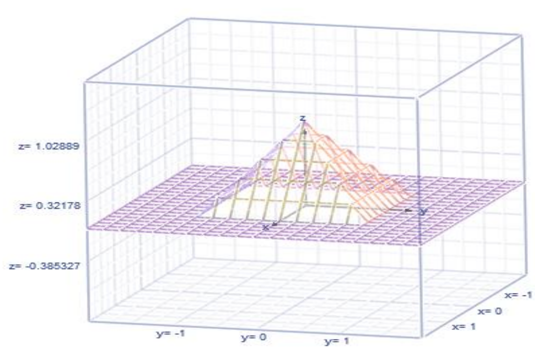
$$\big((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\big) \cdot (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{A}) = 0$$

Por consiguiente, empleando el factor $\frac{xy(|y|-|x|)}{xy(|y|-|x|)}$ se remueve la discontinuidad en $|x| = |y|$ y se obtiene la expresión:

$$z = b\left(1 - \frac{(\,|x| + |y|) + \big|\,|x| - |y|\big|}{2a}\right)$$

Finalmente, se define la función $f: \mathbb{R}^2 \to [0, b]$así:

$$f(x, y) = z f_{]-a,a[^2}(x, y)$$



Relaciones entre intervalos cerrados

Contenencia

Sea la función $F_0: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$F_0([a,b],[c,d]) = \begin{cases} 0, & [a,b] \nsubseteq [c,d] \\ 1, & [a,b] \subseteq [c,d] \end{cases}$$

$$F_0([a,b],[c,d]) = f_{[c,d]}(a) f_{[c,d]}(b)$$

Igualdad

Sea la función $F_1: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$F_1([a,b],[c,d]) = \begin{cases} 0, & [a,b] \nsubseteq [c,d] \vee [c,d] \nsubseteq [a,b] \\ 1, & [a,b] \subseteq [c,d] \wedge [c,d] \subseteq [a,b] \end{cases}$$

$$F_1([a,b],[c,d]) = F_0([a,b],[c,d]) F_0([c,d],[a,b])$$

También,

$$F_1([a,b],[c,d]) = \delta(a-c)\delta(b-d) + \delta(a-d)\delta(b-c)$$

Disyunción

Sea la función $F_2: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$F_2([a,b],[c,d]) = \begin{cases} 0, & [a,b] \cap [c,d] \neq \emptyset \\ 1, & [a,b] \cap [c,d] = \emptyset \end{cases}$$

$$F_2([a,b],[c,d]) = \left(1 - f_{[c,d]}(a)\right)\left(1 - f_{[c,d]}(b)\right)\left(1 - f_{[a,b]}(c)\right)$$

Intersecantes

Sea la función $F_3: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \to \{0,1\}$ definida así:

$$F_3([a,b],[c,d]) = \begin{cases} 0, & ([a,b] \cap [c,d] = \emptyset) \vee ([a,b] \subseteq [c,d]) \vee ([c,d] \subseteq [a,b]) \\ 1, & ([a,b] \cap [c,d] \neq \emptyset) \wedge ([a,b] \nsubseteq [c,d]) \wedge ([c,d] \nsubseteq [a,b]) \end{cases}$$

$$F_3([a,b],[c,d]) = \big(1 - F_2([a,b],[c,d])\big)\big(1 - F_0([a,b],[c,d])\big)\big(1 - F_0([c,d],[a,b])\big)$$

También,

$$F_3([a,b],[c,d]) = \left(1 - f_{[c,d]}(a)\right) f_{[c,d]}(b) + f_{[c,d]}(a) \left(1 - f_{[c,d]}(b)\right)$$

Ejemplo

Sea la función $F: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \neq v\}^2 \to \{-1,0,1\}$ definida así:

$$F([a,b],[c,d]) = \begin{cases} -1, & si\ hay\ contenencia \\ 0, & si\ son\ disyuntos \\ 1, & si\ son\ intersecantes \end{cases}$$

$$F([a,b],[c,d]) = F_0([a,b],[c,d]) + 2F_2([a,b],[c,d]) + 3F_3([a,b],[c,d]) - 2$$